Méthodes mathématiques discrètes

Résumé de cours

(Complément aux thèmes 2.2 et 3.1)

Inégalités célèbres et théorèmes limites
de la théorie des probabilités avec applications

A.Yu. Veretennikov

25 mars 2026

Table des matières

4 Marches aléatoires simples (MAS) **1**

5 MAS, notion de mise à l'échelle, TCL **2**

5 MAS et méthode des différences finies pour les EDP **5**

4 Marches aléatoires simples (MAS)

Cette section est un complément au thème 2.2 (LGN de Bernoulli).

Considérons le processus aléatoire[1] $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, où (X_k) est une suite de v.a. i.i.d.. Nous nous plaçons dans le cas symétrique le plus simple du schéma de Bernoulli avec les valeurs $+1$ et -1 (au lieu de $+1$ et 0) et avec $p = q = 1/2$. Notons dès à présent que $E(X_k) = 0$ et $V(X_k) = 1$.

Exercice 1 ((45))**.** Trouver toutes les probabilités

$$p_{n,k} = \mathsf{P}(S_n = k), \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

Si l'on connaît le triangle de Pascal, on peut l'utiliser.
Indication : posons $n = 2m$; alors k ne peut être que pair ; soit $j := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(X_i = 1)$; alors $k = j - (n - j) = 2j - n$, d'où $j = (n + k)/2$; ainsi, $+1$ doit apparaître exactement $j = (n + k)/2$ fois ; cette formule reste valable pour $n = 2m + 1$.

Notons une propriété intéressante du processus MA S_n : à chaque instant (non aléatoire) n, la probabilité que son prochain accroissement $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$ prenne l'une de ses valeurs autorisées (± 1) est indépendante des valeurs de S_k pour tout $k \leq n$. C'est un exemple de *processus de Markov*, ou de *chaîne de Markov*[2]. En fait, les probabilités des

[1] Par définition, un processus aléatoire est simplement une collection de variables aléatoires indexées par chaque valeur de n, interprétée comme le temps.

[2] Cette définition ne sera pas requise pour l'examen.

accroissements de S_n à chaque instant n ne dépendent de rien du tout — elles sont indépendantes à chaque instant ; tandis que pour des processus de Markov plus complexes, il leur est permis de dépendre, mais uniquement de la dernière valeur du processus lui-même, c'est-à-dire de S_n, et non de $S_{n-1}, S_{n-2}, \dots$

Exercice 2 ((46))**.** En utilisant (ou SANS utiliser) la LGN de Bernoulli (Chebyshev), trouver la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\, \mathsf{P}(S_n = k).$$

NB : La somme est prise sur toutes les valeurs possibles de k : les valeurs paires de $-n$ à n si n est pair, ou les valeurs impaires de $-n$ à n si n est impair ; pour k de parité incorrecte, les probabilités $\mathsf{P}(S_n = k)$ sont simplement nulles. On peut aussi examiner la limite séparément pour n pair et n impair ; ces deux limites doivent coïncider, ce qui permet de parler d'une limite globale.
Indications : Dans l'une des approches, il peut être utile d'utiliser l'égalité $\mathsf{P}(S_n = k) = E\mathbf{1}(S_n = k)$, et dans l'autre — la propriété de linéarité de l'espérance ; en particulier,

$$ES_n = E\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} EX_k.$$

Encore un indice : peut-être peut-on calculer la somme elle-même sans se soucier du signe de la limite ?

5 MAS, notion de mise à l'échelle, TCL

Cette section est un complément au thème du TCL.

Le modèle suivant de MAS est lié à la mise à l'échelle (*scaling*). Nous supposons toujours que (X_n) est une réalisation du schéma de Bernoulli avec les valeurs $+1$ et -1 (au lieu de $+1$ et 0) et avec $p = q = 1/2$. Soit $h > 0$ et posons

$$Y_t^{(h)} := \sqrt{h}\, S_{[t/h]}, \quad t \geq 0.$$

Il s'avère que, pour tout $t > 0$ fixé, la suite de v.a. $Y_t^{(h)}$ converge faiblement (en loi) quelque part lorsque $h \downarrow 0$. Pour simplifier, nous supposerons qu'il existe une suite $h_n \downarrow 0$, par exemple $h_n = 1/n$, de sorte que $\sqrt{h} = 1/\sqrt{n}$. Nous renommons[3] donc :

$$Z_t^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}}\, S_{[tn]}, \quad t \geq 0.$$

En réalité, le résultat de la convergence faible de $Z_t^{(n)}$ lorsque $n \to \infty$ est un cas particulier du Théorème Central Limite (TCL). C'est ce que nous allons étudier maintenant. Il s'agit d'un théorème de convergence faible, encore plus important pour la statistique mathématique que la LGN. Rappelons-le dans sa forme générale.

Théorème 5.1 ((47), TCL)**.** *Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. à moment du second ordre fini, $EX_1^2 < \infty$ et $V(X_1) =: \sigma^2 > 0$; posons $a = EX_1$. Alors*

$$\frac{S_n - an}{\sqrt{n}} \implies \eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \tag{10}$$

[3] Ici $[a]$ désigne la partie entière du nombre a.

NB : $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ est la notation standard pour la loi normale (= gaussienne) avec la densité de probabilité (d.p.)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

Rappelons que la notation $\eta \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ signifie exactement que la v.a. η suit la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. La fonction caractéristique (f.c.) d'une telle v.a. est de la forme[4] $\exp(-\lambda^2\sigma^2/2)$. Notons[5] que si $\eta \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et c est une constante, alors

$$c\eta \sim \mathcal{N}(0, c^2\sigma^2). \tag{11}$$

De plus, la loi de la v.a. $\eta + c$ est notée $\mathcal{N}(c,\sigma^2)$; pour $\sigma^2 > 0$ sa d.p. est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

Le rôle des paramètres est le suivant : $E(\eta + c) = c$, $V(\eta + c) = V(\eta) = \sigma^2$.

Démonstration du Théorème 47. Nous utilisons la méthode des fonctions caractéristiques. Tout d'abord, l'existence d'un second moment fini $EX_1^2 < \infty$ implique l'existence de la dérivée seconde de la f.c. $E\exp(i\lambda X_1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous admettrons ce fait et écrirons le développement de Taylor à la dérivée seconde en zéro pour $|\lambda|$ petit :

$$\psi(\lambda) = E\exp(i\lambda X_1) = 1 + i\lambda EX_1 - \frac{\lambda^2}{2}EX_1^2 + o(|\lambda|^2). \tag{12}$$

En posant $EX_1 = 0$ (le terme en λ disparaît dans le développement (12)), nous avons :

$$\begin{aligned}
E\exp\left(\frac{i\lambda S_n}{\sqrt{n}}\right) &= E\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{i\lambda X_k}{\sqrt{n}}\right) \\
&\overset{\text{ind.}}{=} \prod_{k=1}^{n} E\exp\left(\frac{i\lambda X_k}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \left(E\exp\left(\frac{i\lambda X_1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{\lambda^2 V(X_1)}{2n} + o\left(\frac{\lambda^2}{n}\right)\right)^n \\
&\longrightarrow \exp\left(-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right), \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression coïncide exactement avec la f.c. de la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, ce qui était à démontrer. (Il s'agit en fait d'une répétition de la première preuve du TCL ; rappelons cependant que nous étudions ici la marche aléatoire.) □

En statistique mathématique, on travaille fréquemment avec des sommes de v.a. En pratique, le TCL s'applique souvent de façon approchée dès $n = 6, 7, \ldots$ Il est utilisé pour la construction d'intervalles de confiance (généralement avec une correction dont il n'est

[4] Cela doit être connu ; sinon, c'est un exercice.

[5] Exercice. On peut formellement considérer que pour $\sigma^2 = 0$ (ou $c = 0$) c'est aussi une loi normale, dégénérée : elle n'a pas de densité, c'est une v.a. concentrée en un seul point 0.

pas question ici), pour les tests d'hypothèses, etc. La relation (10) peut s'écrire de manière équivalente en termes de convergence des fonctions de répartition : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathsf{P}\left(\frac{S_n - an}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) \;\to\; \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2)\, dy, \quad n \to \infty.$$

On ajoute souvent que la convergence est uniforme en x : cela s'établit sans difficulté, bien que cela ne découle pas directement du seul fait de la convergence faible.

Examinons ce que le TCL apporte à la compréhension du comportement asymptotique de la MAS mise à l'échelle $Z_t^{(n)}$. Rappelons :

$$Z_t^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}}\, S_{[tn]} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[tn]} X_k, \quad t \geq 0.$$

Corollaire 5.2 ((48))**.** *Pour tout $t > 0$, la suite $Z_t^{(n)}$ converge faiblement :*

$$Z_t^{(n)} \implies \eta_t \sim \mathcal{N}(0, t), \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Démonstration. Appliquons le TCL. Pour $t > 0$ fixé, posons $m := [tn]$. Alors :

$$Z_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[tn]} X_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{m} X_k = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} X_k.$$

Lorsque $n \to \infty$, on a aussi $m \to \infty$. D'après le TCL (Théorème 47),

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} X_k \implies \eta_1 \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Le facteur non aléatoire $c_n = \sqrt{m}/\sqrt{n} = \sqrt{[tn]}/\sqrt{n}$ converge :

$$c_n = \frac{\sqrt{[tn]}}{\sqrt{n}} \to \sqrt{t}, \quad n \to \infty.$$

On en déduit[6] $Z_t^{(n)} \Rightarrow \eta_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, ce qui était à démontrer. □

Commentons brièvement les liens avec les théories modernes du calcul stochastique, dont le développement se poursuit encore aujourd'hui. On peut montrer que, dans un certain sens, il existe une limite faible non seulement pour chaque $t > 0$ fixé, mais pour tous les t simultanément, au moins sur un intervalle de temps fini (mais aussi sur $[0, +\infty)$). A la limite, on obtient un processus continu, mais à trajectoires non différentiables, appelé *processus de Wiener*[7] (ou *mouvement brownien*). Ce processus joue un rôle capital dans la théorie moderne des probabilités, la statistique mathématique, la physique mathématique et les équations aux dérivées partielles ; il lui est associé des notions remarquables telles que l'intégrale stochastique d'Itô et les équations différentielles stochastiques. Tout cela ne sera pas exigé à l'examen !

[6] Cela peut également être considéré comme un exercice.

[7] *Wiener process*, processus de Wiener, en hommage au mathématicien américain Norbert Wiener (dont le nom signifie littéralement « l'homme de Vienne »), qui est notamment considéré comme l'un des fondateurs de la cybernétique ; mais il a aussi apporté des contributions importantes dans de nombreux autres domaines.

5 MAS et méthode des différences finies pour les EDP

Supposons que l'on veuille calculer, exactement ou du moins approximativement, la solution de l'équation de la chaleur[8] (bien que la solution sous forme intégrale soit connue)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\Delta_x u(t,x) = -f(t,x), \quad 0 \le t \le T, \quad u(T,x) = g(x). \tag{14}$$

Dans le cas unidimensionnel (x scalaire), on a $\Delta_x = \partial^2/\partial x^2$.

Exercice 1 ((49))**.** *Posons $v(t,x) = u(T-t,x)$, où $u(t,x)$ est la solution du problème (14). Montrer que la fonction $v(t,x)$ satisfait le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur « standard » :*

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\Delta_x v(t,x) = -f(t,x), \quad 0 \le t \le T, \quad v(0,x) = g(x).$$

Pour résoudre l'équation (14), nous souhaitons appliquer un schéma aux différences finies simple. Discrétisons cette équation en posant $h = T/N$, où N est un grand entier (qui devra ensuite tendre vers l'infini). L'une des discrétisations naturelles de l'équation (14) est l'équation aux différences (schéma explicite[9])

$$\frac{u((k+1)h,x) - u(kh,x)}{h} + \frac{u((k+1)h, x+\sqrt{h}) - 2u((k+1)h,x) + u((k+1)h, x-\sqrt{h})}{2h} = -f((k+1)h, \tag{15}$$

pour $0 \le k \le N-1$, avec la condition $u(T,x) = g(x)$, à résoudre sur le réseau $x = m\sqrt{h}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (en faisant ensuite $h \downarrow 0$, ce que nous n'analyserons pas en détail, en espérant — à juste titre — que l'on obtient quelque chose de proche de la solution de l'équation (14)).

Notons que l'équation (15) peut s'écrire de façon équivalente sous la forme

$$u(kh,x) = \frac{u((k+1)h, x+\sqrt{h}) + u((k+1)h, x-\sqrt{h})}{2} + f((k+1)h, x)\, h, \tag{16}$$

pour $0 \le k \le N-1$, avec $u(T,x) = g(x)$, car les termes $u((k+1)h,x)$ et $-2u((k+1)h,x)/2$ dans (15) s'annulent.

À son tour, le terme $\dfrac{u((k+1)h, x+\sqrt{h}) + u((k+1)h, x-\sqrt{h})}{2}$ peut s'écrire comme

$$\frac{u((k+1)h, x+\sqrt{h}) + u((k+1)h, x-\sqrt{h})}{2} = Eu\Big((k+1)h,\ x + \sqrt{h}\, X_1\Big), \tag{17}$$

où $(X_k, k = 1, 2, \ldots)$ est, rappelons-le, une suite de v.a. i.i.d. de Bernoulli avec les valeurs ± 1 et les probabilités $p = q = 1/2$.

[8] Habituellement, dans l'équation de la chaleur, le signe moins est placé devant $\partial/\partial t$ et on considère la condition initiale en $t = 0$; ici, à l'inverse, le signe plus est devant $\partial/\partial t$, et la condition est terminale, au temps T ; les deux versions de l'équation s'obtiennent l'une de l'autre par le changement de temps $t \mapsto T - t$ et réciproquement.

[9] Il est dit explicite car la condition terminale est donnée, de sorte que l'équation doit être résolue en temps inversé.

Exercice 2 ((50))**.** Vérifier rigoureusement la formule (17).
Indication : démontrer de droite à gauche, en utilisant la définition de l'espérance d'une v.a. et/ou d'une fonction de v.a.

Il s'avère qu'il existe une représentation probabiliste de la solution de l'équation aux différences (14) à travers le processus $Z_t^{(n)}$. Pour le point $(t,x)=(0,0)$, elle est la suivante.

Théorème 5.3 ((51))**.** *Pour $h=T/N$ et $n=1/h$, on a*

$$u^h(0,0)=E\left[\sum_{k=1}^{N} f\left(kh,\ Z_{kh}^{(n)}\right)h+g\left(Z_T^{(n)}\right)\right]. \tag{18}$$

Pour le point initial $(t,x)=(k_0h,\ m_0\sqrt{h})$:

$$u^h(k_0h,\ m_0\sqrt{h})=E\left[\sum_{k=1}^{N-k_0} f\left(k_0h+kh,\ m_0\sqrt{h}+Z_{kh}^{(n)}\right)h+g\left(m_0\sqrt{h}+Z_{T-k_0h}^{(n)}\right)\right], \tag{19}$$

ou, de façon équivalente (bien que sans le signe de l'espérance, les membres droits de (19) et (20) ne soient pas égaux en général ; cependant, leurs lois le sont, et donc leurs espérances aussi) :

$$u^h(k_0h,\ m_0\sqrt{h})=E\left[\sum_{k=k_0+1}^{N} f\left(kh,\ m_0\sqrt{h}+Z_{kh}^{(n)}-Z_{k_0h}^{(n)}\right)h+g\left(m_0\sqrt{h}+Z_T^{(n)}-Z_{k_0h}^{(n)}\right)\right]. \tag{20}$$

Cela suggère que, si la limite faible de tout le processus $Z_t^{(h)}$ existe (et nous savons déjà que pour chaque t la limite faible existe bien) — notons-la[10] W_t, $t\geq 0$ — alors l'expression limite obtenue à partir de (18) doit être[11] :

$$u(0,0)=E\left[\int_0^T f(t,W_t)\,dt+g(W_T)\right]. \tag{21}$$

La forme plus générale pour un point arbitraire (s,x_0) est :

$$u(s,x_0)=E\left[\int_s^T f(t,\ x_0+(W_t-W_s))\,dt+g(x_0+W_T-W_s)\right], \tag{22}$$

ou, sous forme équivalente,

$$u(s,x_0)=E\left[\int_s^T f(t,\ x_0+W_{t-s})\,dt+g(x_0+W_{T-s})\right]. \tag{23}$$

Signalons au lecteur que les deux formes sont valides et équivalentes dans le cas simple que nous considérons, mais que pour des équations plus générales avec des coefficients dépendant de t et x (ce qui dépasse le cadre de ce cours), la forme (22) est plus appropriée.

[10] C'est le processus de Wiener (PW). Dans ce cours, il suffit de savoir que W_t est, pour tout $t>0$, une v.a. de loi normale $\mathcal{N}(0,t)$; mais ce n'est pas la seule condition qui doit être satisfaite pour que l'objet puisse être appelé PW.

[11] Nous supposons que f et g sont continues et bornées ; si nécessaire, on peut supposer plus de régularité.

Dans le cas présent, elles sont toutes deux équivalentes et peuvent être réécrites à travers la représentation intégrale de la solution de l'équation de la chaleur :

$$u(s,x_0) = \int_s^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \underbrace{x_0+y}_{=v}) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy \right] dt$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} g(\underbrace{x_0+z}_{=w}) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-s)}} \exp\left(-\frac{z^2}{2(T-s)}\right) dz \qquad (24)$$

$$= \int_s^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t,v) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(v-x_0)^2}{2t}\right) dv \right] dt$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} g(w) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-s)}} \exp\left(-\frac{(w-x_0)^2}{2(T-s)}\right) dw, \qquad (25)$$

puisque, avec les substitutions $v = x_0 + y$ et $w = x_0 + z$, on a $dy = dv$ et $dz = dw$.

Il reste à justifier la validité de la formule (15) (ou (16)).

Démonstration du Théorème 51. Simplifions-nous la vie en supposant $f \equiv 0$.

Nous procédons par récurrence. Premièrement, pour $k_0 = N$, on a $Nh = T$ par construction. Alors, d'après la condition (terminale) $u(Nh, x) = g(x)$, et donc pour $x = m_0\sqrt{h}$:

$$u^h(Nh, m_0\sqrt{h}) = g(m_0\sqrt{h}).$$

La base de la récurrence est vérifiée.

Supposons ensuite que la formule (19) est vraie pour un certain $0 < k_0 = k+1 \leq N$; montrons-la pour k. En vertu de l'équation (15) (avec $f \equiv 0$), pour $x = m_0\sqrt{h}$:

$$\frac{u((k+1)h,x) - u(kh,x)}{2} + \frac{u((k+1)h, x+\sqrt{h}) - 2u((k+1)h,x) + u((k+1)h, x-\sqrt{h})}{2} = 0,$$

d'où

$$u(kh,x) = u((k+1)h,x) + \frac{u((k+1)h, x+\sqrt{h}) - 2u((k+1)h,x) + u((k+1)h, x-\sqrt{h})}{2}.$$

Rappelons que

$$Z_t^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[tn]} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[tn]} X_k, \quad t \geq 0,$$

où (X_k) est le schéma de Bernoulli avec les valeurs ± 1 et $p = q = 1/2$. On remarque que

$$\frac{u((k+1)h, x+\sqrt{h}) - 2u((k+1)h,x) + u((k+1)h, x-\sqrt{h})}{2} = Eu((k+1)h, x+X_{k+1}\sqrt{h}) - u((k+1)h, x)$$

(C'est l'analogue de l'exercice 50. Comme pour l'égalité (17), il est plus facile de comprendre cette formule en la lisant de droite à gauche, c'est-à-dire en calculant l'espérance de la fonction dans laquelle on insère la v.a. de Bernoulli X_{k+1}.) Ainsi,

$$u(kh,x) = u((k+1)h,x) + Eu((k+1)h, x+X_{k+1}\sqrt{h}) - u((k+1)h,x) = Eu((k+1)h, x+X_{k+1}\sqrt{h}),$$

car les termes $\pm u((k+1)h, x)$ s'annulent. Par hypothèse de récurrence, pour $u((k+1)h, \cdot)$ dans le membre de droite :

$$u((k+1)h, m_0\sqrt{h}) = Eg\Big(m_0\sqrt{h} + Z_T^{(n)} - Z_{(k+1)h}^{(n)}\Big)\,,$$

où $-Z_{(k+1)h}^{(n)} = -\sum_{i=k+2}^{N} X_i/\sqrt{n}$. Par conséquent, en utilisant l'identité $-Z_{(k+1)h}^{(n)} + \sqrt{h}\, X_{(k+1)h} = -Z_{kh}^{(n)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} u(kh, m_0\sqrt{h}) &= Eu\Big((k+1)h,\ m_0\sqrt{h} + X_{k+1}\sqrt{h}\Big) \\ &= Eu\Big((k+1)h,\ (m_0 + X_{k+1})\sqrt{h}\Big) \\ &= Eg\Big((m_0 + X_{k+1})\sqrt{h} + Z_T^{(n)} - Z_{(k+1)h}^{(n)}\Big) \\ &= Eg\Big(m_0\sqrt{h} + Z_T^{(n)} - Z_{kh}^{(n)}\Big)\,. \end{aligned}$$

C'est exactement la formule (19) pour $k_0 = k$ et $f \equiv 0$, ce qui était à démontrer. Par récurrence, la formule (19) est prouvée. □

Remarque 5.1 ((52))**.** D'après la loi des grands nombres, pour N suffisamment grand,

$$u^h(0,0) = E\Big[g\Big(Z_T^{(n)}\Big)\Big] \approx \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\Big[g\Big(Z_T^{(n,i)}\Big)\Big]\,,$$

où i est le numéro d'itération lors de la simulation de la MAS Z. Cela suggère une méthode « réelle » de calcul approché de $u^h(0,0)$.